

Mathématiques Financières

Chapitre 1 & 2: Intérêts simples et Escompte

Pr. Fatima-Zahra AAZI
FSJES AC – UH2C

LES INTERETS SIMPLES

On parle d'intérêts simples quand les intérêts sont *toujours* calculés sur la base du capital initial. Dans ce cas, la valeur acquise C_n d'un capital C_0 placé pendant n années avec un taux d'intérêt annuel i sera:

$$C_n = C_0 + C_0 \times i \times n$$

$$C_n = C_0 (1 + i \times n)$$

La valeur acquise est la somme du capital initial et des intérêts produits, donc, I_n , le cumul des intérêts au bout de n années, sera :

$$I_n = C_0 \times i \times n$$

i : le taux d'intérêt annuel. Un taux de 3% = $3/100 = 0,03$. 2

LES INTERETS SIMPLES

Exemple 1

Un individu place 20.000Dh pendant 3 ans au taux annuel de 3%. Quelle serait la valeur acquise au terme du placement ?

Durée en mois

Si le capital est placé pendant quelques mois, la valeur acquise C_k sera:

$$C_k = C_0 (1 + i \times k/12)$$

avec :

k : Nombre de mois de placement

i : Taux d'intérêts annuel

Exemple 2

Quelle est la valeur acquise d'un montant de 30.000 Dh placé pendant 6 mois avec un taux d'intérêts annuel de 3%?

Durée en jours

$$C_j = C_0 (1 + i \times j/360)$$

$$I_j = C_0 \times i \times j/360$$

j: Nombre de jours de placement

Exemple 3

Calculer l'intérêt produit par un capital de 10.000 Dh placé pendant 102 jours à un taux annuel de 3,5%

Durée en jours

Pour les contrats dits de date à date, on compte le nombre de jours exact entre les 2 dates.

Exemple 4

Calculer la valeur acquise d'un capital de 10.000 Dh placé à un taux de 3% du 1^{er} Avril au 7 Aout.

$$(j = (30-1) + 31 + 30 + 31 + 7 = 128 \text{ jours})$$

Exemple 5

Soit un montant de 10.000 Dh placé à un taux de 3% du 1^{er} Avril au 31 juillet. Comparer les intérêts produits si le calcul est fait par jours ou par mois.

Autres

Intérêts calculés par quinzaines (au bout de q quinzaines)

$$C_q = C_0 (1 + i \times q/24)$$

$$I_q = C_0 \times i \times q/24$$

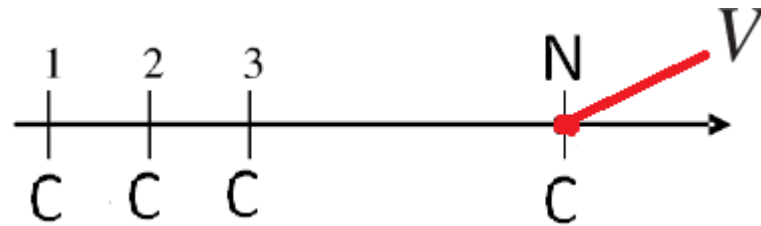
Intérêts calculés par trimestre (au bout de T trimestres)

$$C_T = C_0 (1 + i \times T/4)$$

$$I_T = C_0 \times i \times T/4$$

Cas des versements constants

La valeur acquise V de N versements mensuels constants C (au moment du dernier versement) est :



$$V = C \times N \times \frac{2 + i \times \frac{N - 1}{12}}{2}$$

$$V = C \times N \times \left(1 + i \times \frac{N - 1}{24} \right)$$

Exemple 6

Calculer la valeur acquise de 12 versements mensuels de 5000 Dh à un taux de 4%.

Taux moyen de 2 ou Plusieurs placements

C'est le cas où l'on cherche un taux moyen i_m d'un ensemble de placements avec des taux différents.

Exemple:

Quel est le taux moyen des deux placements suivants:

- Placement de 10.000Dh pendant 90 jours à 3%
- Placement de 50.000Dh pendant 56 jours à 5%.

L'idée est que le montant total des intérêts produits avec les deux taux de placement soit égal à celui calculé avec le taux moyen. Soit:

$$(10.000 \times (90/360) \times 0,03) + (50.000 \times (56/360) \times 0,05) = (10.000 \times (90/360) \times i_m) + (50.000 \times (56/360) \times i_m)$$

$$i_m = \frac{(10.000 \times 90 \times 0,03) + (50.000 \times 56 \times 0,05)}{(10.000 \times 90) + (50.000 \times 56)}$$

Taux moyen de 2 ou Plusieurs placements

D'une manière générale, le taux moyen i_m d'un ensemble de placements C_1, C_2, \dots, C_n pendant des périodes d_1, d_2, \dots, d_n aux taux i_1, i_2, \dots, i_n , est :

$$i_m = \frac{C_1 \times d_1 \times i_1 + C_2 \times d_2 \times i_2 + \dots + C_n \times d_n \times i_n}{C_1 \times d_1 + C_2 \times d_2 + \dots + C_n \times d_n}$$

$$i_m = \frac{\sum_{k=1}^n C_k \times d_k \times i_k}{\sum_{k=1}^n C_k \times d_k}$$

L'escompte commercial

Un effet de commerce

Un effet de commerce est un document (ordre de paiement) où une personne/entreprise s'engage à payer un montant (valeur nominale de l'effet) à une date ultérieure (future) appelée la date d'échéance.

Le détenteur d'un effet de commerce peut avoir besoin de l'encaisser avant sa date d'échéance. Ceci est possible en contrepartie d'un montant de frais. On parle d'une opération d'escompte.

L'escompte commercial

La valeur d'escompte (ou l'escompte) est le montant des frais à payer pour l'encaissement de l'effet de commerce avant sa date d'échéance. L'escompte (e) dépend de la valeur nominale de l'effet (V), du nombre de jours séparant la date d'encaissement de la date d'échéance (j) et du taux d'escompte i .

$$e = V \times i \times j/360$$

La valeur actuelle de l'effet de commerce sera :

$$V_a = V - e = V - V \times i \times j/360$$

$$V_a = V (1 - i \times j/360)$$

L'escompte commercial

Application

Calculer l'escompte commercial et la valeur actuelle d'un effet de commerce de valeur nominale 10.000Dh à échéance le 30/06/2020 présenté à l'escompte le 13/02/2020. Taux d'escompte 8%.

L'escompte commercial – L'agios

En plus de l'escompte, la banque ajoute des frais et des taxes. Le coût réel de l'opération d'escompte, appelé l'agio (a), est :

$$\text{Agio} = \text{Escompte} + \text{Frais} + \text{Taxes}$$

La valeur finale (nette) de l'effet de commerce sera:

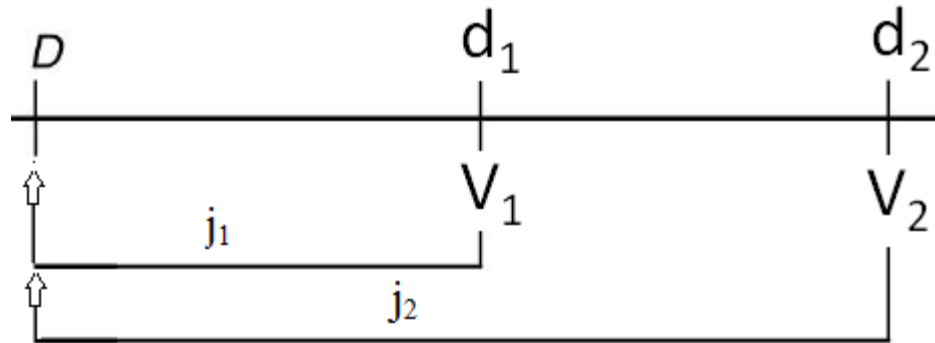
$$V_n = V - a$$

Le taux réel d'escompte, appelé le Taux Effectif Global (TEG), est plus grand que « i ». C'est le taux appliqué, sur la durée d'escompte, pour trouver le montant d'agio.

$$a = V \times \text{TEG} \times j/360$$

Équivalence des effets

Deux effets sont dits équivalents à une date donnée s'ils ont la même valeur actuelle à cette date (date d'équivalence D).



Un effet peut être équivalent à plusieurs effets (c-à-d peut remplacer ou être remplacé par plusieurs effets) si sa valeur actuelle à une date est égale à la somme des valeurs actuelles des autres effets.

Equivalence des effets

Si j_1 (resp. j_2) est le nombre de jours séparant, à la date D, le premier effet (resp. le deuxième effet) de sa date d'échéance donc les deux effets sont équivalents si :

$$V_1 (1 - i \times j_1 / 360) = V_2 (1 - i \times j_2 / 360)$$

Equivalence des effets - Exemples

1- Un commerçant souhaite renégocier le 20 Février (reporter la date de paiement) un effet de commerce de valeur nominale 50.000 Dh à échéance 1^{er} Mars 2020 au 31 décembre 2020. Quelle est la valeur nominal du nouvel effet pour un taux d'escompte de 8%.

2- Un commerçant doit payer deux effets:

Un premier de 5000Dh à échéance le 1^{er} Avril et un deuxième de 8000Dh à payer le 30 Juillet.

S'il décide le 1^{er} Mars de remplacer les deux effets par un seul à échéance le 1^{er} Avril, Quel sera le montant du nouvel effet avec un taux d'escompte de 5%.